

А. В. С п и в а к о в с к и й

## О строении сепараторно факторизуемых конечных групп

Пусть  $C$  — свойства подгруппы быть дополняемой во всей группе  $G$ . В соответствии с работой [1] группу  $G$  назовем сепараторно факторизуемой, если в ней существует собственная подгруппа  $N$ , называемая  $C$ -сепарирующей, такая, что каждая подгруппа группы  $G$ , не содержащаяся в  $N$ , и сама  $N$  дополняема в  $G$ .

В настоящей работе продолжается исследование конечных групп, имеющих дополняемые  $C$ -сепарирующие подгруппы, начатое в работах [2, 3]. В начале приведем необходимые вспомогательные утверждения.

**Предложение 1** [4]. Если группа  $G$  разлагается в полупрямое произведение  $G = A \rtimes B$  абелевой подгруппы  $A$ , являющейся прямым про-

изведением инвариантных в  $G$  циклических групп простых порядков, и вполне факторизуемой подгруппы  $B$ , то группа  $G$  вполне факторизуема.

Предложение 2 [5]. Нормальная подгруппа  $K$  группы  $G$  обладает дополнением в  $G$ , если для любого простого делителя  $p$  индекса  $|G : K|$  подгруппа  $G_p \cap K$  абелева и дополняема в силовской  $p$ -подгруппе  $G_p$  группы  $G$ .

Теорема 1 [3]. Конечная группа  $G$  тогда и только тогда имеет хотя бы одну дополняемую во всей группе  $C$ -сепарирующую подгруппу, когда  $G$  — группа одного из типов

$$(\mathfrak{G}_1): G = ((Q_1 \times F_1) \times (Q_2 \times F_2) \times (\dots \times (Q_n \times F_n) \dots)) \times \langle x \rangle,$$

причем выполняются следующие условия:

1)  $(Q_i \times F_i)$  — абелева вполне факторизуемая группа,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

2) группа  $Q_i$  разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе  $K_i = (Q_i \times F_i) \times ((Q_{i+1} \times F_{i+1}) \times (\dots \times (Q_n \times F_n) \dots))$ , и  $F_i$  — нормальная подгруппа группы  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

3)  $Q = Q_1 \times (Q_2 \times (\dots \times Q_n) \dots)$  — вполне факторизуемая группа,  $F = F_1 \times (F_2 \times (\dots \times F_n) \dots)$  — абелева вполне факторизуемая группа,  $F \times \langle x \rangle$  — группа Фробениуса с инвариантным множителем  $F$  и  $x^p = 1$ ,  $p$  — простое число;

4) для любой  $\langle x \rangle$ -допустимой подгруппы из группы  $F$  в ней найдется дополнение, инвариантное в группе  $K$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

5) все силовские подгруппы группы  $G$  являются элементарными абелевыми;

$$(\mathfrak{G}_2): G = (((Q_1 \times F_1) \times ((Q_2 \times F_2) \times (\dots \times (Q_n \times F_n) \dots))) \times P_1) \times (P_2 \times S) \times \langle x \rangle,$$

причем выполняются следующие условия:

6)  $(Q_i \times F_i)$  — абелева вполне факторизуемая группа,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

7) группа  $Q_i$  разлагается в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе  $K_i = (((Q_i \times F_i) \times ((Q_{i+1} \times F_{i+1}) \times (\dots \times (Q_n \times F_n) \dots))) \times P_1) \times (P_2 \times S)$ , а  $F_i \Delta K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

8)  $Q = Q_1 \times (Q_2 \times (\dots \times Q_n) \dots)$  — вполне факторизуемая группа,  $F = F_1 \times (F_2 \times (\dots \times F_n) \dots)$  — абелева вполне факторизуемая группа,  $C_F(P_2) = F$  и  $F \times \langle x \rangle$  — группа Фробениуса с инвариантным множителем  $F$ ,  $x^p = 1$ ,  $p$  — простое число;

9) для любой  $\langle x \rangle$ -допустимой подгруппы из группы  $F_i$  в ней найдется дополнение, инвариантное в группе  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

10)  $(P_1 \times P_2) \times \langle x \rangle$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $P_1$  — группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе,  $K_1$ ,  $P_1 \times P_2$  — элементарная абелева  $p$ -подгруппа,  $P_1^x = P_1$  и  $P_2^x = P_2$ ;

11)  $S$  — группа  $\mathfrak{G}_1$ ;

12) все силовские подгруппы группы  $K_1$  являются элементарными абелевыми.

В дальнейшем мы будем придерживаться обозначений, введенных в теореме 1.

Лемма 1. Пусть  $G$  — группа типа  $\mathfrak{G}_1$ . Тогда

$$G = B \times ((F \times T) \times (D \times \langle x \rangle)),$$

причем выполняются следующие условия:

1)  $B$  — абелева вполне факторизуемая группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе  $M = B \times ((F \times T) \times D)$ ;

2)  $F \times T$  — абелева вполне факторизуемая группа;

3)  $T \times D$  — вполне факторизуемая группа;

$F \times (D \times \langle x \rangle)$  — группа Фробениуса с инвариантным множителем  $F$ , при этом  $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_n$ , где  $\mathcal{F}_i$  — минимальные нормальные де-



лители группы  $F \setminus (D \times \langle x \rangle)$ , и каждая подгруппа из группы  $F \times (D \times \langle x \rangle)$  действует на  $\mathcal{F}_i$  неприводимо,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

5) все силовские подгруппы группы  $G$  являются элементарными абелевыми.

Доказательство. Из теоремы 1 непосредственно следует, что  $Q_i = C_{Q_i}(Q_1) \times X_i$ , где  $X_i \triangleleft K_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Далее имеем  $C_{Q_i}(Q_1) = C_{C_{Q_i}(Q_1)}(C_{Q_i}(Q_1)) \times Y_i$ , где  $Y_i \triangleleft K_i$ ,  $i = 3, 4, \dots, n$ . Продолжая такой процесс, получим следующее равенство:

$$K_1 = (Q_1 \times F_1) \setminus (S_2 \times L_2 \times F_2) \times (\dots \setminus (S_n \times F_n \times L_n) \dots),$$

где  $T_0 = Q_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \times S_n$  — максимальный абелев нормальный делитель вполне факторизуемой группы  $Q = Q_1 \setminus (Q_2 \setminus (\dots \setminus Q_n) \dots)$ ,  $S_i, L_i \triangleleft K_i$ , и  $L_i \subset Q$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . В силу двуступенной разрешимости группы  $Q$ , легко получаем равенство

$$Q = (Q_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \times S_n) \times (L_2 \times L_3 \times \dots \times L_n).$$

Обозначим группу  $L_2 \times L_3 \times \dots \times L_n$  через  $L$  и перейдем к рассмотрению группы  $M_1 = \langle F, T_0 \rangle$ . Очевидно,  $M_1 = FT_0 = (Q_1 \times F_1) \setminus ((S_2 \times F_2) \setminus (\dots \setminus (S_n \times F_n) \dots))$ . В силу теоремы Ито [6] группа  $M_1$  является двуступенно разрешимой. Тогда, поскольку  $S_i = C_{S_i}(K_{i+1}) \times [S_i, K_{i+1}]$  и  $F_i = C_{F_i}(K_{i+1}) \times [F_i, K_{i+1}]$ , непосредственно имеем

$$M_1 = (Q_1 \times F_1 \times U_{21} \times W_{21} \times \dots \times U_{n1} \times W_{n1}) \setminus (U_{22} \times W_{22} \times \dots \times U_{n2} \times W_{n2}),$$

где  $U_{i1} \times U_{i2} = S_i$ ,  $W_{i1} \times W_{i2} = F_i$  и  $U_{i1} \triangleleft M_1$ ,  $W_{i1} \triangleleft M_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Значит группа  $M_1 = (T_{11} \times F_{11}) \setminus (T_{12} \times F_{12})$ , где  $T_{11} \times T_{12} = T_0$ ,  $F_{11} \times F_{12} = F$ ,  $T_{11} \triangleleft M_1$  и  $F_{11} \triangleleft M_1$ .

Аналогично и группа  $M_2 = FL$  представима в виде полупрямого произведения  $M_2 = (L_{11} \times F_{13}) \setminus (L_{12} \times F_{14})$ , где  $L_{11} \times L_{12} = L$ ,  $F_{13} \times F_{14} = F$ ,  $L_{11} \triangleleft M_2$  и  $F_{14} \triangleleft M_2$ .

Тогда группа  $Q = \langle R, N_Q(F) \rangle$ , где  $R$  —  $F$ -допустимая подгруппа. Очевидно, группа  $Z_0 = \langle R^a, a \in (N_Q(F) \setminus \langle x \rangle) \rangle$  нормальна в группе  $G$  и лежит в подгруппе  $Q$ . В силу предложения 2 [5],  $N \setminus \langle x \rangle = (Z_0 \cap N) \setminus (D_0 \setminus \langle x \rangle)$ , где  $N = N_Q(F)$  и  $D_0 \subset N$ . Поэтому

$$G = Z_0 \setminus (F \setminus (D_0 \setminus \langle x \rangle)), \quad (1)$$

В силу п. 2 теоремы 1 соотношение (1) принимает вид

$$G = Z_1 \setminus (Z_2 \setminus (F \setminus (D_0 \setminus \langle x \rangle))), \quad (2)$$

где  $Z_i$ ,  $i = 1, 2$ , — абелевы вполне факторизуемые группы, разложимые в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков инвариантных для  $i = 1$  в группе  $M$ , для  $i = 2$  в группе  $Z_2 \setminus (F \setminus D_0)$ . Тогда, ввиду предложения 1 [4]

$$G = Z \setminus ((F \times K) \setminus (D_0 \setminus \langle x \rangle)). \quad (3)$$

Здесь  $K$  — абелева вполне факторизуемая группа,  $(K \setminus D_0)$  — вполне факторизуемая группа,  $Z$  — абелева вполне факторизуемая группа, представимая в виде прямого произведения циклических подгрупп простых порядков инвариантных в группе  $M$ , и  $K^* = K$ .

Поскольку  $D_0$  лежит во вполне факторизуемой группе  $Q$ , то  $D_0 = D_1 \setminus D_2$ , где  $D_1^* = D_1$ ,  $D_2^* = D_2$  и  $D_1, D_2$  — абелевы вполне факторизуемые группы. Тогда  $D_1 = [D_1, x] \times C_{D_1}(\langle x \rangle)$  и  $D_2 = [D_2, x] \times C_{D_2}(\langle x \rangle)$ . Очевидно,  $C_{F \setminus [D_i, x]}(\langle x \rangle) = E$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому группа  $F \times [D_i, x]$  нильпотентна,  $i = 1, 2$ , а значит и абелева (см. п. 5 теоремы 1), т. е. группа  $\langle [D_1, x], [D_2, x] \rangle \subset C_{D_0}(F)$ . Тогда в силу предложения 2 [5] соотношение (3) примет вид

$$G = Z \setminus ((F \times (K \setminus C_{D_0}(F))) \setminus (D \setminus \langle x \rangle)),$$



где  $D \subset D_0$ . Теперь, поскольку  $Z \times (F \times (K \times C_{D_0}(F)))$  — вполне факторизуемая группа, а все силовские подгруппы группы  $G$  являются элементарными абелевыми, то

$$G = B \times ((F \times T) \times (D \times \langle x \rangle)),$$

и выполняются пп. 1, 2, 3, 5 леммы 1.

Покажем теперь, что  $D$  — абелева вполне факторизуемая группа. Для этого рассмотрим группу  $H = F \times (D \times \langle x \rangle)$ . Поскольку все силовские подгруппы группы  $H$  являются элементарными абелевыми, то к этой группе применима теорема Машке. А именно: группа  $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_n$ , где  $\mathcal{F}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — минимальные нормальные делители группы  $H$ . Очевидно,  $(D \times \langle x \rangle)/C_{(D \times \langle x \rangle)}(\mathcal{F}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — абелева вполне факторизуемая группа. Тогда в силу известной теоремы Ремака группа  $D \times \langle x \rangle$  является абелевой, поскольку  $C_{(D \times \langle x \rangle)}(F) = E$ . Таким образом, группа  $F \times (D \times \langle x \rangle)$  является группой Фробениуса с инвариантным множителем  $F$ . Легко заметить теперь, что  $F \times (D \times \langle x \rangle)$  — непримарно факторизуемая группа. Поэтому из работы [7] непосредственно следует истинность п. 4 настоящей леммы. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — группа типа  $\mathfrak{G}_2$ . Тогда

$$G = (B \times P_1) \times ((F \times T \times P_2) \times (D \times \langle x \rangle)),$$

причем выполняются следующие условия:

1)  $(B \times P_1)$  — абелева вполне факторизуемая группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе  $M = (B \times P_1) \times ((F \times T \times P_2) \times D)$ ;

2)  $(F \times T \times P_2)$  — абелева вполне факторизуемая группа;

3)  $(T \times P_2) \times D$  — вполне факторизуемая группа;

4)  $F \times (D \times \langle x \rangle)$  — группа Фробениуса с инвариантным множителем  $F$ ,  $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_n$ , где  $\mathcal{F}_i$  — минимальные нормальные делители группы  $F \times (D \times \langle x \rangle)$  и каждая подгруппа из группы  $D \times \langle x \rangle$  действует на  $\mathcal{F}_i$  неприводимо,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

5)  $(P_1 \times P_2) \times \langle x \rangle$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $x^p = 1$ ,  $p$  — простое число и все силовские подгруппы группы  $M$  являются элементарными абелевыми.

**Доказательство.** Следуя рассуждениям, которые используются при доказательстве леммы 1, получаем, что группа  $Q_0 = ((Q_1 \times (Q_2 \times (\dots \times Q_n) \dots)) \times P_1) \times (P_2 \times (Q_{n+1} \times (\dots \times Q_{n+r}) \dots)) = \langle R, N_{Q_0}(F) \rangle$ , где  $S = (Q_{n+1} \times F_{n+1}) \times (\dots \times (Q_{n+r} \times F_{n+r}) \dots)$  и множители  $Q_{n+i}$ ,  $F_{n+i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  удовлетворяют пп. 1—5 теоремы 1, а  $R$  —  $F$ -допустимая подгруппа. Очевидно, группа  $Z_0 = \langle \langle R, P^a \rangle, a \in (N_{Q_0}(F) \times \langle x \rangle) \rangle$  нормальна в группе  $G$  и лежит в подгруппе  $Q_0$ .

В силу предложения 2 [5]  $N \times \langle x \rangle = (Z_0 \cap N) \times (D_0 \times \langle x \rangle)$ , где  $N = N_{Q_0}(F)$  и  $D_0 \subset N$ . Поэтому  $G = Z_0 \times (F \times (D_0 \times \langle x \rangle))$ .

Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1. Лемма 2 доказана.

Из теоремы 1, лемм 1 и 2 непосредственно получается следующий основной результат настоящей работы.

**Теорема 2.** Конечная группа  $G$  тогда и только тогда является сепараторно факторизуемой, когда

$$G = (B \times P_1) \times ((F \times T \times P_2) \times (D \times \langle x \rangle)),$$

причем выполняются следующие условия:

1)  $B \times P_1$  — абелева вполне факторизуемая группа, разложимая в прямое произведение циклических подгрупп простых порядков, инвариантных в группе  $M = (B \times P_1) \times ((F \times T \times P_2) \times D)$ ;

2)  $F \times T \times P_2$  — абелева вполне факторизуемая группа;

3)  $(T \times P_2) \times D$  — вполне факторизуемая группа;

4)  $F \times (D \times \langle x \rangle)$  — группа Фробениуса с инвариантным множителем  $F = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_n$  и с вполне факторизуемым циклическим допол-

нительным множителем  $D \times \langle x \rangle$ , который, как и все его собственные подгруппы, действует на  $\mathcal{F}_1$  неприводимо,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

5)  $(P_1 \times P_2) \rtimes \langle x \rangle$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $x^p = 1$ ,  $p$  — простое число и все силовские подгруппы группы  $M$  являются элементарными абелевыми.

1. Черников С. Н. Группы, имеющие сепарирующие подгруппы. — В кн.: Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 6—14.
2. Сливаковский А. В. Конечные группы, имеющие  $C$ -сепарирующие подгруппы. — В кн.: Строение групп и их подгрупповая характеристика. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 87—100.
3. Сливаковский А. В. Строение конечных групп, имеющих  $C$ -сепарирующие подгруппы. — Киев, 1984. — 63 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.13).
4. Черникова Н. В. Группы с дополняемыми подгруппами. — Мат. сб., 1956, 39, № 3, с. 273—292.
5. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 268 с.
6. Hô N. Über das Product von zwei abelschen Gruppen. — Math. Z., 1955, 62, N 4, S 400—401.
7. Сучков Н. М. О некоторых линейных группах с дополняемыми подгруппами. — Алгебра и логика, 1977, 16, № 5, с. 603—620.